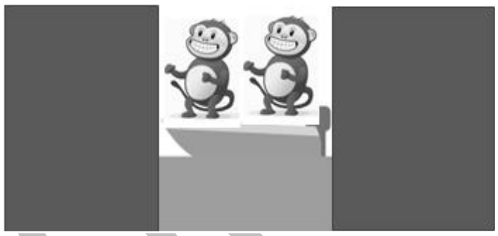
51^{η} Επαναληπτική Άσκηση

Μία ιδιαίτερη άσκηση στα προβλήματα ακροτάτων.

Μία μπανάνα κρέμεται από ένα ελατήριο το οποίο είναι στερεωμένο στο ταβάνι ενός δωματίου ύψους h και το ύψος της από την επιφάνεια του πατώματος μεταβάλλεται σύμφωνα με τον τύπο $f(t)=\dfrac{4\eta\mu t-2t-t\cdot\sigma\upsilon\nu t}{2+\sigma\upsilon\nu t}$, όπου t σε ώρες και $f(t)$ σε μέτρα με $t\in[0,2\pi]$. Δύο μαϊμούδες βρίσκονται πάνω σε μία βάρκα, η οποία βρίσκεται στο εσωτερικό μίας δεξαμενής με νερό, κάτω από την επιφάνεια του πατώματος, όπως φαίνεται στο σχήμα. Οι μαϊμούδες πηδάνε προς τα πάνω προσπαθώντας να φτάσουν την μπανάνα. Η δεξαμενή γεμίζει και αδειάζει έτσι ώστε, το ύψος του χεριού κάθε μαϊμούς, που έχει τεντωμένο το χέρι της προς τα πάνω χωρίς να πηδάει, από την επιφάνεια του πατώματος να μεταβάλλεται σύμφωνα με τον τύπο $g(t)=\eta\mu t-\dfrac{3\pi+4}{2}$ όπου t σε ώρες και $g(t)$ σε μέτρα με $t\in[\pi,2\pi]$.



Θεωρήστε ως μηδενικό σημείο του ύψους την επιφάνεια του πατώματος, θετικό και αρνητικό άξονα ύψους πάνω και κάτω αντίστοιχα, από την επιφάνεια του πατώματος. Θεωρήστε, επίσης, ότι την χρονική στιγμή $t\in[0,\pi]$ η στάθμη του νερού παραμένει σταθερή σε ύψος $h_1=-\dfrac{3\pi+4}{2}$ m από την επιφάνεια του πατώματος.

α) Να μελετήσετε τις συναρτήσεις f,g ως προς την μονοτονία και ακρότατα.

β) Να βρείτε τις χρονικές στιγμές t_1 και t_2 που μία μαϊμού έχει την μικρότερη και την μεγαλύτερη πιθανότητα αντίστοιχα να πιάσει την μπανάνα με $t_1,t_2\in[0,\pi]$.

γ) Να βρείτε το ελάχιστο ύψος που πρέπει να φτάνει το χέρι της μαϊμούς, καθώς πηδάει με τεντωμένο το χέρι προς τα πάνω, ώστε να μπορεί να πιάσει την μπανάνα ανά πάσα χρονική στιγμή.

δ) Να βρείτε το μέγιστο ύψος που πρέπει να φτάνει το χέρι της μαϊμούς, καθώς πηδάει με τεντωμένο το χέρι προς τα πάνω, ώστε να έχει δυνατότητα μία μοναδική χρονική στιγμή $t\in[0,2\pi]$ να πιάσει την μπανάνα.

ε) Να βρείτε σε ποια από τις δύο χρονικές στιγμές $t_3=\pi$ ώρες και $t_4=\dfrac{3\pi}{2}$ ώρες μία μαϊμού έχει την μεγαλύτερη πιθανότητα να πιάσει την μπανάνα.

στ) Αν για κάποιο λόγο η μπανάνα σταθεροποιηθεί στο ύψος $h_2=-\dfrac{3\pi+4}{2}$ m τότε να βρείτε τις χρονικές στιγμές που μία μαϊμού θα μπορέσει να φτάσει την μπανάνα χωρίς να πηδήξει.

Επιμέλεια: Νίκος Τούντας

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,2\pi)$ ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$$f'(t)=\frac{(4\text{συν}t-2-\text{συν}t+t\cdot\text{ημ}t)(2+\text{συν}t)+\text{ημ}t(4\text{ημ}t-2t-t\cdot\text{συν}t)}{(2+\text{συν}t)^2}=$$

$$=\frac{(3\text{συν}t-2+t\cdot\text{ημ}t)(2+\text{συν}t)+\text{ημ}t(4\text{ημ}t-2t-t\cdot\text{συν}t)}{(2+\text{συν}t)^2}=$$

$$=\frac{6\text{συν}t-4+2t\cdot\text{ημ}t+3\text{συν}^2t-2\text{συν}t+t\cdot\text{ημ}t\cdot\text{συν}t+4\text{ημ}^2t-2t\cdot\text{ημ}t-t\cdot\text{ημ}t\cdot\text{συν}t}{(2+\text{συν}t)^2}=$$

$$=\frac{4\text{συν}t-4+3\text{συν}^2t+4\text{ημ}^2t}{(2+\text{συν}t)^2}=\frac{4\text{συν}t-4+3\text{συν}^2t+4(1-\text{συν}^2t)}{(2+\text{συν}t)^2}=$$

$$=\frac{4\text{συν}t-4+3\text{συν}^2t+4-4\text{συν}^2t}{(2+\text{συν}t)^2}=\frac{4\text{συν}t-\text{συν}^2t}{(2+\text{συν}t)^2}=$$

$$=\frac{-\text{συν}^2t+4\text{συν}t}{(2+\text{συν}t)^2}=-\frac{\text{συν}t(\text{συν}t-4)}{(2+\text{συν}t)^2},t\in(0,2\pi)$$

Έχουμε $f'(t)=0\Leftrightarrow-\dfrac{\text{συν}t(\text{συν}t-4)}{(2+\text{συν}t)^2}=0\Leftrightarrow\text{συν}t(\text{συν}t-4)=0\Leftrightarrow\begin{cases}\text{συν}t=0\\ \text{ή}\\ \text{συν}t-4=0\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\text{συν}t=0\\ \text{ή}\\ \text{συν}t-4=0\end{cases}\overset{t\in(0,2\pi)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}t=\dfrac{\pi}{2}\\ t=\dfrac{3\pi}{2}\\ \text{συν}t=4\end{cases}\overset{-1\le\text{συν}t\le1}{\Leftrightarrow}\begin{cases}t=\dfrac{\pi}{2}\\ \text{ή}\\ t=\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$$

Επίσης έχουμε $\text{συν}t>0\overset{t\in(0,2\pi)}{\Leftrightarrow}t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ και $\text{συν}t<0\overset{t\in(0,2\pi)}{\Leftrightarrow}t\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ και $(2+\text{συν}t)^2\ge0$ και $-1\le\text{συν}t\le1\Leftrightarrow-5\le\text{συν}t-4\le-3<0$ για κάθε $t\in(0,2\pi)$.

Άρα προκύπτει ότι: $f'(t)>0\Leftrightarrow t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ και $f'(t)<0\Leftrightarrow t\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ και η f είναι συνεχής στα $0,\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$ και 2π.

Άρα $f\nearrow$ στα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και $\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$ και $f\searrow$ στο $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$.

Άρα η f παρουσιάζει τοπικά μέγιστα στα $t=\frac{\pi}{2}$ και $t=2\pi$ τα $A\left(\frac{\pi}{2},f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=A\left(\frac{\pi}{2},\frac{4-\pi}{2}\right)$ και $B(2\pi,f(2\pi))=B(2\pi,-2\pi)$.

Επειδή $\frac{4-\pi}{2}>0>-2\pi$ τότε η f έχει ολικό μέγιστο το $A\left(\frac{\pi}{2},f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=A\left(\frac{\pi}{2},\frac{4-\pi}{2}\right)$.

Επίσης η f παρουσιάζει τοπικά ελάχιστα στα $t=0$ και $t=\frac{3\pi}{2}$ τα $O\left(0,f\left(0\right)\right)=O\left(0,0\right)$ και $\Gamma\left(\frac{3\pi}{2},f\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)=\Gamma\left(\frac{3\pi}{2},-\frac{4+3\pi}{2}\right)$.

Επειδή $-\frac{4+3\pi}{2}<0$ τότε η f έχει ολικό ελάχιστο το $\Gamma\left(\frac{3\pi}{2},f\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)=\Gamma\left(\frac{3\pi}{2},-\frac{4+3\pi}{2}\right)$.

Έχουμε την συνάρτηση $g\left(t\right)=\eta\mu t-\frac{3\pi+4}{2},\left[\pi,2\pi\right]$ η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως τριγωνομετρική με παράγωγο: $g'\left(t\right)=\sigma\upsilon\nu t,\left[\pi,2\pi\right]$ και ισχύει:

Για $t\in\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]:\sigma\upsilon\nu t\le 0\Rightarrow g'\left(t\right)\le 0\Rightarrow g\searrow\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$

Για $t\in\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]:\sigma\upsilon\nu t\ge 0\Rightarrow g'\left(t\right)\ge 0\Rightarrow g\nearrow\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$

Άρα η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $t=\frac{3\pi}{2}$ το $\Delta\left(\frac{3\pi}{2},g\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)=\Delta\left(\frac{3\pi}{2},-\frac{3\pi+6}{2}\right)$

Επίσης η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $t=\pi$ και $t=2\pi$ τα $E\left(\pi,g\left(\pi\right)\right)=E\left(\pi,-\frac{3\pi+4}{2}\right)$ και $Z\left(2\pi,g\left(2\pi\right)\right)=Z\left(2\pi,-\frac{3\pi+4}{2}\right)$.

β) Στο χρονικό διάστημα $\left[0,\pi\right]$ η στάθμη του νερού παραμένει ακίνητη.

Μικρότερη πιθανότητα να πιάσουν την μπανάνα έχουν όταν βρίσκεται στο ανώτερο σημείο. Η συνάρτηση f στο διάστημα $\left[0,\pi\right]$ παρουσιάζει μέγιστο στο για $t=\frac{\pi}{2}$. Άρα την $t=\frac{\pi}{2}$ sec από το α ερώτημα η μπανάνα βρίσκεται στο κατώτερο σημείο άρα $t_1=\frac{\pi}{2}$ ώρες.

Μεγαλύτερη πιθανότητα να πιάσουν την μπανάνα έχουν όταν βρίσκεται στο κατώτερο σημείο. Η συνάρτηση f στο διάστημα $\left[0,\pi\right]$ παρουσιάζει ελάχιστο για $t=0$. Άρα την $t=0$ sec από το α ερώτημα η μπανάνα βρίσκεται στο κατώτερο σημείο άρα $t_2=0$ ώρες.

γ) Το ελάχιστο ύψος που πρέπει να φτάνει το χέρι της μαϊμούς, καθώς πηδάει με τεντωμένο το χέρι προς τα πάνω, ώστε να μπορεί να πιάσει την μπανάνα ανά πάσα χρονική στιγμή είναι το μέγιστο ύψος που φτάνει η μπανάνα, δηλαδή $\frac{4-\pi}{2}$ m.

δ) Το ελάχιστο ύψος που πρέπει να φτάνει το χέρι της μαϊμούς, καθώς πηδάει με τεντωμένο το χέρι προς τα πάνω, ώστε να έχει πιθανότητα μία μοναδική χρονική στιγμή $t\in\left[0,2\pi\right]$ να πιάσει την μπανάνα είναι το ελάχιστο που φτάνει η μπανάνα, δηλαδή $-\frac{4+3\pi}{2}$ m. Αν φτάνει σε μικρότερο ύψος τότε δεν μπορεί να πιάσει την μπανάνα ποτέ, ενώ αν είναι σε μεγαλύτερο ύψος θα μπορεί να την πιάσει πάνω από μία φορά.

ε) Στο χρονικό διάστημα $\left[\pi, 2\pi\right]$ η στάθμη του νερού ανεβοκατεβαίνει σύμφωνα με την συνάρτηση g.

Την χρονική στιγμή $t_3 = \pi$ ώρες η στάθμη του νερού βρίσκεται σε ύψος $-\frac{3\pi+4}{2}$ m και η μπανάνα σε ύψος $f\left(\pi\right) = \frac{-2\pi+\pi}{1} = -\pi$ m. Άρα η απόσταση μεταξύ του χεριού κάθε μαϊμούς, που έχει τεντωμένο το χέρι της προς τα πάνω χωρίς να πηδάει και της μπανάνας είναι: $d_1 = \left|-\frac{3\pi+4}{2}\right| + \left|-\pi\right| = \frac{3\pi+4}{2} + \pi = \frac{5\pi+4}{2}$ m

Την χρονική στιγμή $t_4 = \frac{3\pi}{2}$ ώρες η στάθμη του νερού βρίσκεται σε ύψος $-\frac{3\pi+6}{2}$ m και η μπανάνα σε ύψος $-\frac{4+3\pi}{2}$ m. Άρα η απόσταση μεταξύ του χεριού κάθε μαϊμούς, που έχει τεντωμένο το χέρι της προς τα πάνω χωρίς να πηδάει και της μπανάνας είναι: $d_2 = \left|-\frac{3\pi+6}{2}\right| + \left|-\frac{4+3\pi}{2}\right| = \frac{3\pi+6}{2} + \frac{4+3\pi}{2} = 3\pi+5$ m

Έχουμε $\frac{5\pi+4}{2} < 3\pi+5 \Leftrightarrow 5\pi+4 < 6\pi+10 \Leftrightarrow \pi > -6$ Ισχύει

Άρα έχουμε ότι $d_2 > d_1$ άρα μεγαλύτερη πιθανότητα να πιάσουν την μπανάνα έχουν την $t_3 = \pi$ ώρες.

στ) Αν για κάποιο λόγο η μπανάνα σταθεροποιηθεί στο ύψος $h_2 = -\frac{3\pi+4}{2}$ m τότε μία μαϊμού θα μπορέσει να φτάσει την μπανάνα χωρίς να πηδήξει την χρονική στιγμή που θα φτάνει το χέρι της καθώς το έχει τεντωμένο προς τα πάνω, χωρίς να πηδάει, σε εκείνο το ύψος. Αυτό συμβαίνει δύο χρονικές στιγμές σύμφωνα ε το ερώτημα α) την $t = \pi$ ώρες και την $t = 2\pi$ ώρες.